Travaux dirigés- Série 2: Eléctricité II

Saidi
Faculté des Sciences, Rabat

September 20, 2013

Abstract

Université Mohammed V **Année Universitaire 2013-2014**

Faculté des Sciences **SMP: S3**

Electricité II

Travaux Dirigés: Série 2

Exercice I: *nappe de courant et discontinuité de* $\vec{B}$

On considère une nappe plane conductrice de courant, d'épaisseur ε négligeable et traversée par un courant uniforme. On prend, la nappe dans le plan xOy, avec $-\frac{\varepsilon}{2} \leq z \leq \frac{\varepsilon}{2}$, et le vecteur densité de courant $\vec{j} = \varepsilon \vec{j_s}$ avec courant surfacique $\vec{j_s} = j_s \vec{e_x}$.

1) Faire un schéma d'illustration,

2) En utilisant les règles de symétrie, déterminer:

a) Les variables dont dépendent le champ d'induction magnétique $\vec{B}$,

b) Montrer que le champ $\vec{B}$ est dirigé suivant $\vec{e_y}$ (c'est à dire $\vec{B} = B\vec{e_y}$),

3) Pour calculer le composante B, on utilise le théorème d'Ampère,

a) Donner la forme de la courbe d'Ampère Γ, justifier,

b) En déduire l'induction magnétique $\vec{B}$ en tout point $M\,(x, y, z)$,

4) Calculer la valeur de $\vec{B}$ pour le cas $z = 0$,

5) Montrer que $\vec{B}$ est discontinue,

6) Déterminer à une constante près le potentiel vecteur $\vec{A}$ en tout point M de l'espace,

7) En déduire la constante dans le cas où $\vec{A}$ est nul à l'origine.

Exercice II: *Solénoide infini et calcul potentiel vecteur* $\vec{A}$

On considère un solénoide $\mathbb{S}$ infini d'axe $\overrightarrow{OZ}$, de base circulaire de rayon R, parcouru par un courant permanent I et ayant N spires par unité de longueur. On se propose de déterminer le champ d'induction magnétique $\vec{B}\,(M)$ et le potentiel vecteur $\vec{A}\,(M)$ en tout point M de l'espace.

1) Faire un schéma d'illustration,

2) En utilisant les règles de symétrie, déterminer:

a) Les variables dont dépendent le champ d'induction magnétique $\vec{B}$,

b) La direction du champ $\vec{B}$,

3) Pour calculer l'expression explicite du champ d'induction magnétique, on utilise le théorème d'Ampère,

a) Donner la forme de la courbe d'Ampère Γ, justifier le choix,

b) En déduire l'induction magnétique $\vec{B}$ en tout point $M\,(x, y, z)$,

4) Montrer que $\vec{B}$ est discontinue,

Pour déterminer le potentiel vecteur $\vec{A}\,(M)$, on utilisera une relation donnant sa circulation sur un contour fermé C que l'on déterminera.

5) En partant de la relation div $\vec{B} = 0$, montrer que $\oint_C \vec{A}.\vec{dl} = \iint_S \vec{B}.\vec{dS}$,

6) En utilisant les règles de symetries de la distribution de courant, donner:

a) La direction du champ $\vec{A}$ et les variables dont ils dépendent,

b) Le choix de la courbe C pour le calcul de la circulation de $\vec{A}$, justifier,

7) Déterminer le potentiel vecteur $\vec{A}$ en tout point de l'espace

Exercice III: *Force magnétique et effet Hall*

On veut déterminer le nombre n_e d'électrons de conduction que possède un atome de cuivre en utilisant l'effet Hall. Pour cela, on considère une plaquette rectangulaire $ABCD$ de cuivre dans le plan xOy, de longueur L $(0 \leq x \leq L))$, de largeur a $(0 \leq y \leq a)$, d'épaisseur b $(-\frac{b}{2} \leq z \leq \frac{b}{2})$ et traversée par une densité de courant surfacique uniforme $\vec{j} = j\vec{e}_x$. Cette plaquette est plongée dans un champ magnétique extérieur perpendiculaire $\vec{B} = B\ \vec{e}_z$. A l'équilibre, la tension de Hall mesurée entre les 2 bords de largeur de la plaquette est $U_H = 5.510^{-6}V$.

1) Faire un schéma d'illustration,

2) Décrire le phénomène physique observé, commenter,

3) Donner l'expression de la force $\vec{F}_m$ subit par les électrons

4) Sous l'effet de la force magnétique, les électrons sont déviés, donner la direction du champ électrique $\vec{E}$ induit

5) En déduire l'expression de la force totale subit par les électrons

6) Déterminer l'expression du champ $\vec{E}_H$ à l'équilibre en fonction de la vitesse v et B

7) En déduire la valeur de v en fonction de I, a, b et la densité n_e des électrons,

8) Calculer le nombre n_e d'électrons en fonction de B, I, a, b et E_H

9) En déduire le nombre n_e en fonction de U_H; on donne:

$$\begin{array}{llll} M_{mole}\,(cu) = 63g, & B = 1Tesla, & b = 10^{-4}m, & \varrho_{vol}\,(cu) = 9000kg/m^3 \\ U_H = 5.510^{-6}V, & e = 1.610^{-19}C, & I = 10A, & N = 6.0210^{23} \text{ atomes/mole} \end{array}$$

Exercice IV: *Interaction magnétique entre fil infini et un cadre*

Un fil rectiligne z'z de longueur infinie est parcouru par un courant d'intensité I_1. Dans un plan contenant z'z, on place un cadre carré ABCD indéformable, de côté a, parcouru par un courant I_2. Les côtés AB et CD sont parallèles à z'z. Soit y la distance qui sépare AB de z'z.

1) Faire un schéma,

2) Rappeler le champ magnétique $\vec{B}_1$ créé par le fil z'z

3) Déterminer la résultante des forces $\vec{F}_{12}$ exercées par le fil sur le cadre

4) Retrouver l'expression de $\vec{F}_{12}$ en utilisant la relation entre le travail et le flux magnétique

1 Solution de la série II

Exercice I: Nappe plane de courant

1) schema d'illustration

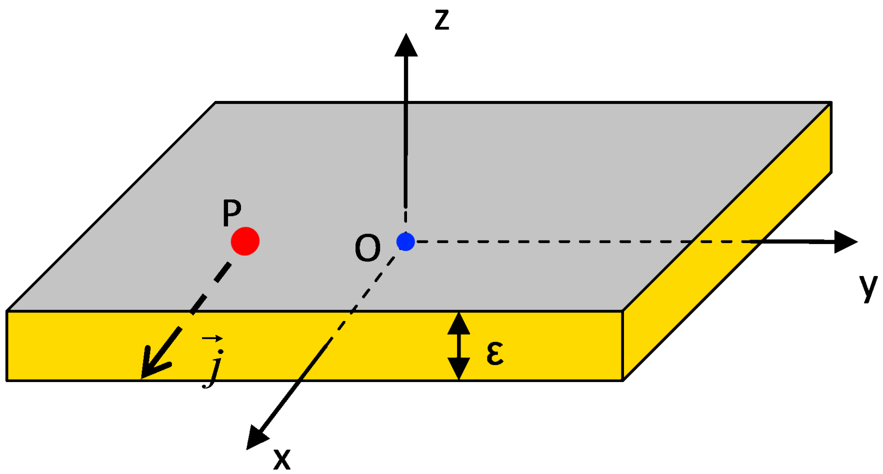


Figure 1: *Nappe plane de courant* $\vec{J} = j_s\ \vec{e}_x$.

2) Déterminer le champ d'induction magnétique $\vec{B}$ en tout point M de l'espace

a) *2 symetries de translations*: suivant x et y

$$\vec{B}(M) = \begin{matrix} B_x(z) \\ B_y(z) \\ B_z(z) \end{matrix}$$

b) direction de $\vec{B}$

Le plan de la nappe (càd $\Pi_s = xOz$) est un plan de symetrie, donc

$$\vec{B} \perp \Pi_s \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = B(z)\,\vec{e}_z$$

3) *Théorème d'Ampère*

$$\oint_\Gamma \vec{B}.\overrightarrow{dl} \quad = \quad \mu_0 I$$

a) la courbe d'Ampère Γ est un rectangle rectangle $ABCD$ de surface S, dont le sens de parcours positif est comme indiqué sur la figure **??**.

$$\text{surface de } ABCD = L_{AB} \times L_{BC} = \varepsilon \times L \quad , \quad \text{coté } BC{=}L$$

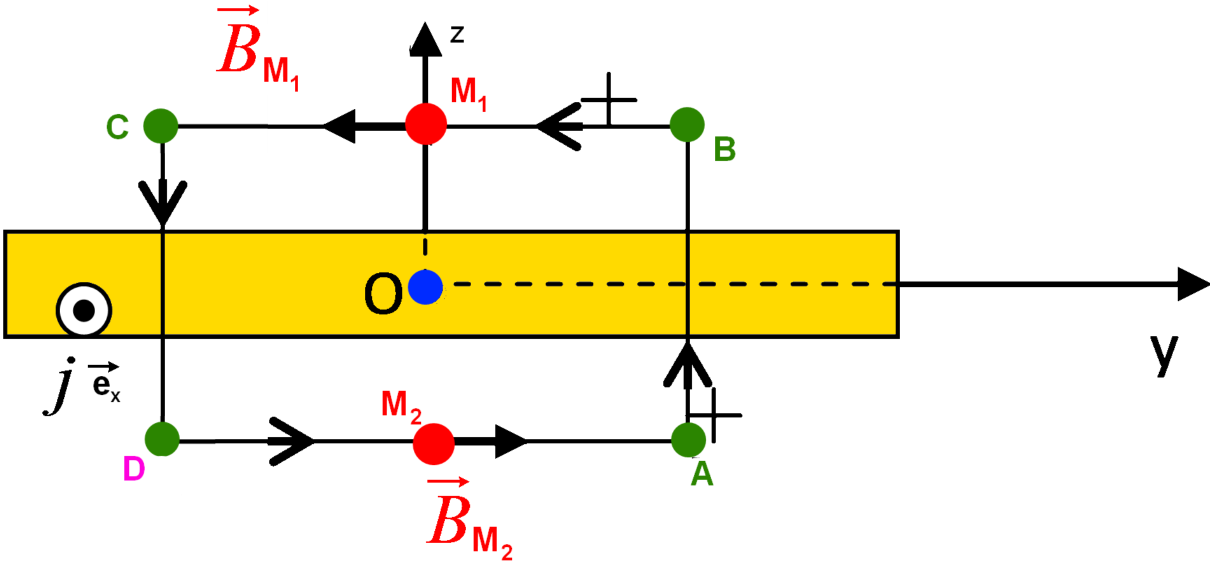


Figure 2: Contour d'Ampère.

Il passe par les points M_1 et M_2, symétriques par rapport à la nappe *b) Calcul de la composnate B*

i) calcul de $\oint_\Gamma \vec{B}.\vec{dl}$

$$
\begin{aligned}
\oint_\Gamma \vec{B}.\vec{dl} &= \oint_\Gamma Bdy \\
&= \left(\int_A^B + \int_B^C + \int_C^D + \int_D^A\right) B \\
&= \int_B^C Bdy + \int_C^D Bdy \\
&= -\int_B^C Bdy + \int_D^A Bdy \\
&= 2BL
\end{aligned}
$$

avec

$$\int_D^A dy = -\int_B^C dy = L$$

ii) calcul de I

$$
\begin{aligned}
\mu_0 I &= \mu_0 \iint_S \vec{J}.\vec{dS} \\
&= \mu_0 J \times S \quad , \quad \text{car } \vec{J} = J\ \vec{e}_x \\
&= \mu_0 \underbrace{J \times \varepsilon}_{J_s} \times L = \mu_0 J_s \times L
\end{aligned}
$$

on a:

$$
\begin{aligned}
\mu_0 \iint_S \vec{J}.\vec{dS} &= \mu_0 J \times S \\
&= \mu_0\ J \times \varepsilon \times L \\
&= \mu_0 J_s \times L
\end{aligned}
$$

iii) résultat

$$\begin{array}{lcl} 2BL = \mu_0 J_s L & \Rightarrow & B = \frac{\mu_0 J_s}{2} = Cst \\ \vec{B}\,(M_1) & = & -\frac{\mu_0 J_s}{2}\vec{e}_y \\ \vec{B}\,(M_2) & = & \frac{\mu_0 J_s}{2}\vec{e}_y \end{array}$$

4) $\vec{B}$ au point $z = 0$

Au point O, origine de l'espace, on distingue 2 plans de symétrie de la nappe

$$\text{xOy} \quad \text{et} \quad \text{xOz}$$

donc $\vec{B}$ doit être perpendiculaire à ces 2 plans, c'est à dire

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ B \\ 0 \end{pmatrix}$$

par conséquent $\vec{B}$ à l'origine O, et pour $z = 0$ en général, ne peut être que nul

$$\vec{B}\,(z = 0) = \vec{0}$$

5) $\vec{B}$ discontinue

$\vec{B}$ est tangent à la nappe de courant; il doit donc vérifier la relation de continuité

$$\vec{B}_{1T}\,(M) - \vec{B}_{2T}\,(M) \quad = \quad \mu_0 \vec{J}_s\,(M) \wedge \vec{n}_{21}$$

avec

$$\vec{n}_{21} \quad \text{la normale orienté de 2 vers 1}$$

Dans notre cas

$$\vec{J}_s\,(M) = J_s\ \vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{n}_{21} = \vec{e}_z$$

$$\vec{B}_{1T}\,(M) - \vec{B}_{2T}\,(M) \quad = \mu_0 J_s\ \vec{e}_x \wedge \vec{e}_z \quad = -\mu_0 J_s \vec{e}_y$$

ce qui est en accord avec

$$\vec{B}_1\,(M) - \vec{B}_2\,(M) \quad = -\frac{\mu_0 J_s}{2}\vec{e}_y - -\frac{\mu_0 J_s}{2}\vec{e}_y \quad = -\mu_0 J_s \vec{e}_y$$

ou on a utilisé

$$\vec{B}\,(M_1) = -\frac{\mu_0 J_s}{2}\vec{e}_y \quad , \quad \vec{B}\,(M_2) = \frac{\mu_0 J_s}{2}\vec{e}_y$$

6) le potentiel vecteur $\vec{A}$

a) symetrie de translation suivant x et suivant y

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x(z) \\ A_y(z) \\ A_z(z) \end{pmatrix}$$

b) direction de $\vec{A}$:

$yOz = \Pi_a$ est un plan d'antisymetrie

$$\vec{A} \perp \Pi_a \qquad \Rightarrow \vec{A}(z) = \begin{pmatrix} A_x(z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) Expression de $\vec{A}$

De la relation $\vec{B} = rot\vec{A}$, on obtient

$$\left| \begin{array}{c} 0 \\ B(z) \\ 0 \end{array} \right. = \left| \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right. \wedge \left| \begin{array}{c} A(z) \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. = \left| \begin{array}{c} 0 \\ \frac{\partial A}{\partial z} \\ 0-0 \end{array} \right.$$

d'où

$$A = \int B dz$$

Trois cas à distinguer:

(i) $z > 0$

$$B(z) = -\frac{\mu_0 J_s}{2} \qquad \Rightarrow \qquad A(z) = -\frac{\mu_0 J_s}{2} z + C_1$$

(ii) $z < 0$

$$B(z) = \frac{\mu_0 J_s}{2} \qquad \Rightarrow \qquad A(z) = \frac{\mu_0 J_s}{2} z + C_2$$

(iii) $z = 0$

$$B = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A(0) = C_3$$

7) cas où $\vec{A}$ est nul à l'origine.

$$A(0) = C_3 = 0$$

la continuté de A exige que les constantes soient nulles,

$$\lim_{z \to 0^{\pm}} A(z) = 0 \quad \Longrightarrow \quad C_1 = C_2 = 0$$

Exercice II

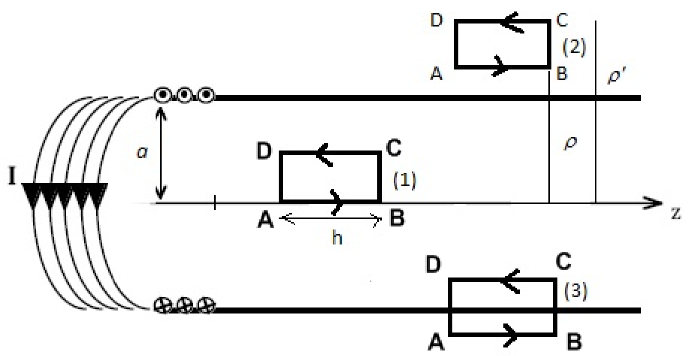


Figure 3: *théorème d'Ampère appliqué* au *sélénoide infini d'axe* $\overrightarrow{OZ}$

1) schema d'illustration: voir fig 3

2) règles de symetrie:

a) La symétrie cylindrique de $\mathbb{S}$ implique: $\vec{B}\,(M) = \vec{B}\,(\rho)$

b) La direction du champ $\vec{B}$

$\Pi_s = (\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$ est un plan de symétrie du solénoide:

$$\vec{B}\ \perp \vec{e}_z \quad \Rightarrow \quad \vec{B}\,(\rho) = B\,(\rho)\,\vec{e}_z$$

3) expression explicite de $\vec{B}$

a) courbe d'Ampère Γ:

rectangles ABCD domme dans la figure

Selon le choix de Γ, on distingue trois cas:

i) <u>*cas du contour*</u> (1)

Pas de courant qui traverse la surface délimitée par le contour,

$$\int \vec{B}.\overrightarrow{dl} = 0$$

D'autre part, on a:

$$\begin{aligned} \int \vec{B}.\overrightarrow{dl} &= \int_{AB} B\vec{e}_z.\overrightarrow{dl} + \underbrace{\int_{BC} B\vec{e}_z.\overrightarrow{dl}}_{=0} + \int_{CD} B\vec{e}_z.\overrightarrow{dl} + \underbrace{\int_{DA} B\vec{e}_z.\overrightarrow{dl}}_{=0} \\ &= \int_{AB} Bdz - \int_{CD} Bdz \\ &= (B_{AB} - B_{CD}) \times h \end{aligned}$$

Donc le champ $\vec{B}$ à l'interieur du solénoide infini est uniforme

$$B_{AB} = B_{CD} = \mu_0 NI$$

ii) <u>*cas du contour*</u> (2)
On obtient le même résultat $(B_{AB} - B_{CD}) \times h = 0$ que pour le cas précédent, c'est à dire un champ uniforme à l'extérieur. Mais comme ce champ doit être nul à l'infini, on en déduit qu'il est nul partout.

$$B_{AB} = B_{CD} = 0$$

on redécouvrera ce résultat dans le cas suivant.
iii) <u>*cas du contour*</u> (3)
Dans ce cas, la surface délimitée par le contour est traversée par $N \times h$ courants entrants; par suite nous avons par un calcul similaire auparavant:

$$(B_{AB} - B_{CD}) \times h = -\mu_0 NI \times h \quad \Rightarrow \quad B_{AB} - B_{CD} = -\mu_0 NI$$

Comme on sait que le terme $B_{CD} = \mu_0 NI$, il en découle que le champ d'induction B_{AB} à l'exterieur du sélénoide est nul.

$$B_{AB} = 0$$

iv) <u>*Conclusion*</u>

$$\vec{B}(\rho) = \begin{cases} \mu_0 NI \ \vec{e}_z & , \quad 0 \leq \rho < R \\ 0 & , \quad \rho > R \end{cases}$$

4) $\vec{B}$ est discontinue:

$$\vec{B}_{1T}(M) - \vec{B}_{2T}(M) = \mu_0 \vec{J}(M) \wedge \vec{n}_{21}$$

comme

$$\vec{n}_{21} = -\vec{e}_\rho, \qquad \vec{j} = NI \ \vec{e}_\varphi$$

on a bien la relation

$$\begin{aligned} \vec{B}_{1T} - \vec{0} &= -\mu_0 NI \ \vec{e}_\varphi \wedge \vec{e}_\rho \\ &= \mu_0 NI \ \vec{e}_z \end{aligned}$$

5) En partant de la relation

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = rot \ \vec{A}$$

par integration sur une surface S s'appuiant sur un contour C,

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{B} &= \iint_S rot\ \vec{A} \\ &= \oint_C \vec{A}.\overrightarrow{dl}\end{aligned}$$

6) règles de symetries de la distribution de courant

a) La symétrie cylindrique de $\mathbb{S}$ implique: $\vec{A}\left(M\right)=\vec{A}\left(\rho\right)$

La direction du champ $\vec{A}$

$\Pi_a=\left(\vec{e}_\rho,\vec{e}_z\right)$ est un plan d'antisymétrie du solénoide

$$\vec{A}\ \perp \vec{e}_\varphi \quad \Rightarrow \quad \vec{A}\left(\rho\right)=A\left(\rho\right)\vec{e}_\varphi$$

b) La courbe C est un cercle de rayon ρ et d'axe $\overrightarrow{Oz}$

Justification, elle est dictée par la symétrie cylindrique car

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{A}.\overrightarrow{dl} &= \oint_C A\rho d\varphi \\ &= A\oint_C \rho d\varphi \text{ car } A \text{ ne dépend pas de } \varphi \\ &= 2\pi\rho A\end{aligned}$$

7) Le potentiel vecteur $\vec{A}$ en tout point de l'espace

on applique la relation

$$\oint_C \vec{A}.\overrightarrow{dl}=\iint_S \vec{B}.\overrightarrow{dS}$$

ce qui conduit à:

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{2\pi\rho}\iint_S \vec{B}.\overrightarrow{dS} \\ &= \frac{1}{2\pi\rho}\iint_S B\times\rho d\rho d\varphi\end{aligned}$$

2 cas à distinguer selon la valeur de $\vec{B}$; càd:

$$\vec{B}\left(\rho\right)=\begin{cases}\mu_0 NI\ \vec{e}_z & ,\quad 0\leq\rho<R \\ 0 & ,\quad \rho>R\end{cases}$$

On a:

i) $\rho>R$

$$\begin{aligned}A\left(\rho\right) &= \frac{1}{2\pi\rho}\iint_S B\rho d\rho d\varphi \\ &= \frac{B}{2\rho}R^2=\mu_0 NI\frac{R^2}{2\rho}\end{aligned}$$

ii) $\rho<R$

$$\begin{aligned}A\left(\rho\right) &= \frac{1}{2\pi\rho}\iint_S B\rho d\rho d\varphi \\ &= \frac{B}{2}\rho=\mu_0 NI\frac{\rho}{2}\end{aligned}$$

Exercice III: *Effet Hall classique*

1) schéma d'illustration: voir fig 4,

un electron de la plaquette du plan xOy de vitesse $\vec{v}$ se déplace suivant $\vec{e}_x$ sous

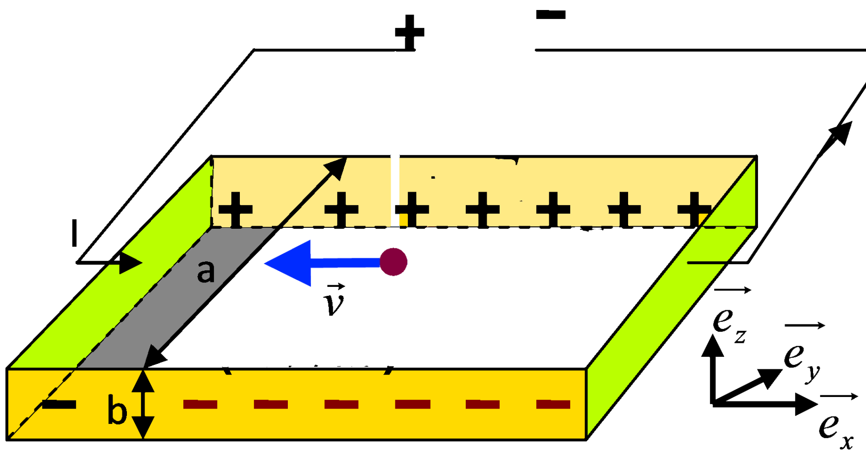


Figure 4: plaque rectangulaire normale à $\vec{e}_z$ de largeur a, d'épaiseur b et de longueur suffisamment grande.

l'effet d'une ddp aux induite par la ddp aux bords $x = 0$ et $x = L$ de la plaquette fournie par un générateur de courant dont le sens est comme désigné sur la figure. On a:

$$\vec{v} = v\vec{e}_x, \qquad v = -|v| \text{ dans le schéma}$$

2) phénomène physique observé: Effet Hall

Cette effet a une version classique et une version quantique selon l'intensité du champ magnétique exterieur $\vec{B}$.

Pour des valeurs du champ magnétique $\vec{B}$ relativement petites; le phénomène observé est comme suit, voir fig 5:

a) deviation des électrons sous l'action de $\vec{B}$

b) naissance d'un déficit de charge électrique aux 2 bords de la plaquette

c) apparition d'une ddp aux 2 bords de la largeur de la plaqueette: A l'equilibre cette tension est la tension de Hall U_H qui induit un champ électrique $\vec{E}_H$

3) Force magnétique:

Sous l'effet de $\vec{B}$, l'électron de vitesse $\vec{v} = v\vec{e}_x$ est soumis à la force

$$\begin{aligned} \vec{F}_m &= -e\vec{v} \wedge \vec{B}, \qquad e = |e| = 1.60217733 \times 10^{-19}\,\text{C} \\ &= evB\vec{e}_y \end{aligned}$$

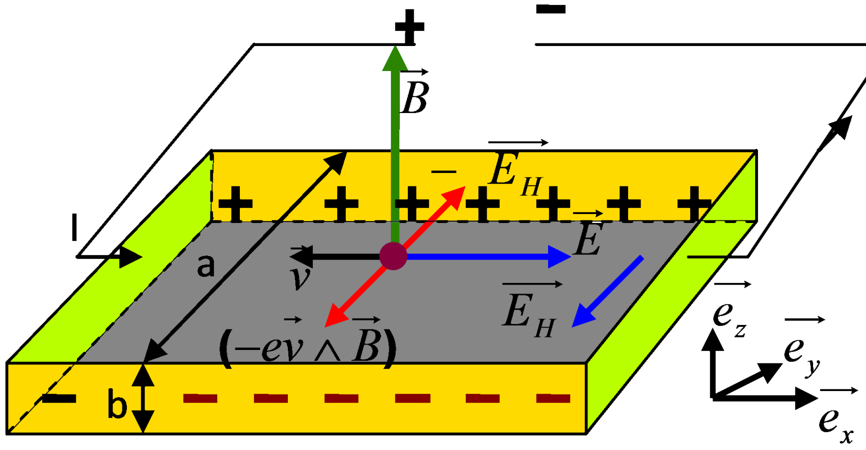


Figure 5: effet Hall classique: (i) déviation des charges sous l'effet du champ $\vec{B}$. (ii) naissance d'une ddp aux bornes de la largeur de la plaque

4) le déficit des charges entre les 2 faces $y = 0$ et $y = a$ crée une ddp

$$\Delta U = U_2 - U_1$$

et donc une champ électrique suivant $\vec{e}_y$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} U = E\vec{e}_y$$

5) réaction par opposition à $\vec{B}$

Le champ electrique $\vec{E} = E\vec{e}_y$ agit à son tour sur l'électron par une force électrique

$$\vec{F}_{el} = -e\vec{E} = -eE\vec{e}_y$$

Cette force s'oppose à la force magnétique $\vec{F}_m$ crée par $\vec{B}$.
L'expression de la force totale subit par l'électron est alors

$$\vec{F}_m + \vec{F}_{el} = (evB - eE)\,\vec{e}_y$$

6) Equilibre des forces $\vec{F}_m$ et $\vec{F}_{el}$ = Effet Hall, on a:

$$\vec{F}_m + \vec{F}_{el} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad evB = eE$$

ce qui donne

$$E_H = vB, \qquad \text{c'est la valeur du champ de Hall} \tag{1.1}$$

7) vitesse de déplacement des électrons: $\vec{v} = -|v|\,\vec{e}_x$

elle est obtenue en calculant l'expression du courant électrique I de deux facons et en comparant les résultats.

a) D'une part

$$I = \int \vec{J}\overrightarrow{dS} \quad = JS \quad = Jab$$

soit

$$J = \frac{I}{ab}$$

ii) d'autre part

$$\begin{aligned} \vec{J} = \rho\vec{v} \quad &= -ne\vec{v} \quad = ne\,|v|\;\vec{e}_x \\ &= \qquad J\vec{e}_x \end{aligned}$$

ce qui donne

$$ne\,|v| \quad = \quad \tfrac{I}{ab}$$

d'ou

$$|v| \quad = \quad \tfrac{I}{abne}$$

8) Le champ E_H découle de la relation

$$E_H = vB, \qquad v = \frac{-I}{abne}$$

soit

$$E_H \quad = \quad \tfrac{-IB}{abne}$$

d'où

$$n \quad = \quad \tfrac{-IB}{eabE_H}$$

De la relation entre le potentiel électrique U et le champ

$$E = -\operatorname{grad} U \qquad \Longrightarrow \qquad U = -\int \vec{E}\;\overrightarrow{dl}$$

on tire

$$\begin{aligned} U_H \quad &= \quad -\textstyle\int \vec{E}_H\;\overrightarrow{dl} \\ &= \quad -E_H \textstyle\int_0^a dy \\ &= \quad -aE_H \end{aligned}$$

9) Nombre de e$^-$par unité de volume et par atome de Cu:

de la relation

$$n \quad = \quad \tfrac{-IB}{ebaE_H}$$

on tire

$$n = \frac{IB}{ebU_H}$$

Application numérique

$$\begin{array}{llcll} b & = 10^{-4}m & , & \varrho_{vol}\,(cu) & = 9000kg/m^3 \\ I & = 10A & , & \mathrm{m}_{mole}\,(cu) & = 63g \\ B & = 1Tesla & , & e & = 1.610^{-19}C \\ U_H & = 5.510^{-6}V & , & N & = 6.0210^{23} \text{ atomes/mole} \end{array}$$

$$\begin{aligned} n &= \frac{10A \times 1Tesla}{1.610^{-19}C \times 10^{-4}m \times 5.510^{-6}V} \\ &= 1.14 \times 10^{29} e^-/m^3 \end{aligned}$$

Le nombre d'atomes par m^3

$$\begin{aligned} \frac{m_{vol} \times N}{m_{mole}} &= \frac{9000kg/m^3 \times 6.0210^{23} atomes/mole}{63 \times 10^{-3}kg} \\ &= 8,6 \times 10^{28} \text{ atomes}/m^3 \end{aligned}$$

Le nombre d'éléctrons par atome est alors

$$\frac{1.14 \times 10^{29} e^-/m^3}{8,6 \times 10^{28} \text{ atomes}/m^3} = 1.33 \text{ e}^-/\text{atome}$$

Exercice IV: *interaction entre conducteurs*

1) Schéma d'illustration

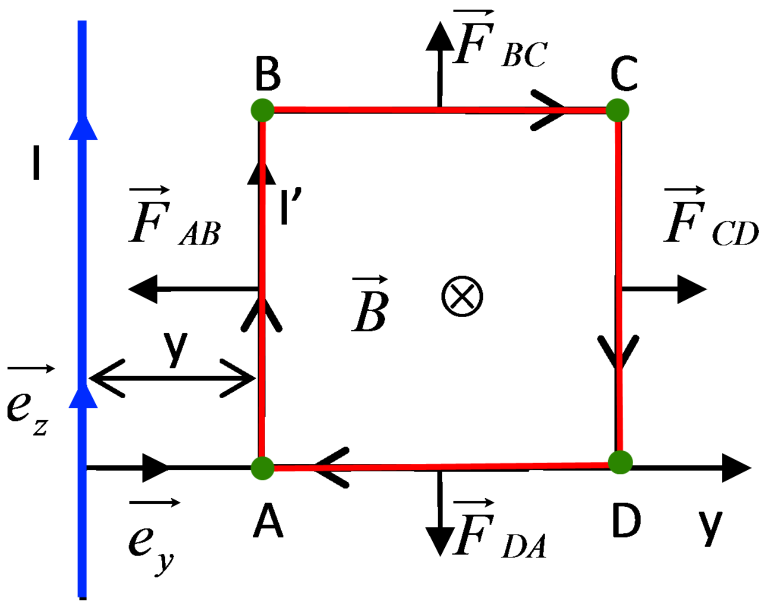


Figure 6: force magnetique exercée par un fil sur un cadre

2) Expression du champ $\vec{B}_1$ crée par le fil

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\rho}\vec{e}_\varphi$$

3) Force $\vec{F}_{12}$ exercée par le fil sur le cadre ABCD.

On a 2 conducteurs:

− Un fil infini parcouru par un cournat I_1 créant un champ magnétique $\vec{B}_1$,

− Un cadre $ABCD$ dans le plan (ρ, φ) parcouru par un courant I_2 créant un champ magnétique $\vec{B}_2$:

En général on a:

Force $\vec{F}_{12}$ exercée par $\vec{B}_1$ sur le cadre ABCD parcouru par I_2

Force $\vec{F}_{21}$ exercée par $\vec{B}_2$ sur le fil parcouru par I_1

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \vec{0}$$

Pour faire le calcul de $\vec{F}_{12}$, on prendra l'exemple où le cadre ABCD dans le plan yOz; c'est à dire $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Dans ce cas le plan $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$ coincide avec $(\vec{e}_y, -\vec{e}_x)$ càd:

$$\begin{aligned} \vec{e}_\rho &= \vec{e}_y \\ \vec{e}_x &= -\vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \vec{B}_1 &= -\tfrac{\mu_0 I1}{2\pi y}\vec{e}_x \\ \vec{B}_1 &= \tfrac{-b}{y}\vec{e}_x, \qquad b = \tfrac{\mu_0 I_1}{2\pi} \end{aligned}$$

Par définition la force $\vec{F}_{12}$ exercée par $\vec{B}$ sur le cadre est

$$\begin{aligned} \vec{F}_{12} &= \textstyle\int_{ABCDA} I_2 \overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}_1 \\ &= \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{BC} + \vec{F}_{CD} + \vec{F}_{DA} \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} \vec{F}_{AB} &= \textstyle\int_{AB} I_2 \overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}_1 \\ \vec{F}_{BC} &= \textstyle\int_{BC} I_2 \overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}_1 \\ \vec{F}_{CD} &= \textstyle\int_{CD} I_2 \overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}_1 \\ \vec{F}_{DA} &= \textstyle\int_{DA} I_2 \overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}_1 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \textstyle\int_{AB} I_2 \overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}_1 &= -I_2 b \textstyle\int_0^a \frac{dz}{y}\ \vec{e}_z \wedge \vec{e}_x &&= -I_2 \tfrac{ab}{y}\vec{e}_y \\ \textstyle\int_{BC} I_2 \overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}_1 &= -I_2 b \textstyle\int_y^{y+a} \frac{dy}{y}\ \vec{e}_y \wedge \vec{e}_x &&= I_2 b \ln \tfrac{y+a}{y}\ \vec{e}_z \\ \textstyle\int_{CD} I_2 \overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}_1 &= = -I_2 b \textstyle\int_a^0 \frac{dz}{y+a}\ \vec{e}_z \wedge \vec{e}_x &&= I_2 \tfrac{ab}{y+a}\ \vec{e}_y \\ \textstyle\int_{DA} I_2 \overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}_1 &= = -I_2 b \textstyle\int_{y+a}^{y} \frac{dy}{y}\ \vec{e}_y \wedge \vec{e}_x &&= -I_2 b \ln \tfrac{y+a}{y}\ \vec{e}_z \end{aligned}$$

Noter que

$$\vec{F}_{BC} = -\vec{F}_{DA}$$

La résultante des forces $\vec{F}$ agissant sur le cadre est

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{CD} \\
&= -I_2 ab \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+a}\right) \vec{e}_y \\
&= \frac{-\mu_0 I_{12} I_2 a^2}{2\pi y(y+a)} \vec{e}_y
\end{aligned}$$

Si le cadre était libre, il serait attiré vers le fil c'est-à-dire vers la région où est plus intense pour que le flux de B à travers le cadre soit maximum (*règle du flux maximal*)

4) Autre méthode

Le travail des forces magnétiques pour un déplacement virtuel dy du cadre est:

$$dW = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}.\overrightarrow{dl} = F dy \\ I_2 d\Phi \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad F = I_2 \frac{d\Phi}{dy}$$

Le flux magnétique est

$$\begin{aligned}
\Phi &= \iint \vec{B}.\overrightarrow{dS} \\
&= -\iint \left(\vec{B}.\overrightarrow{e}_x\right) dz dy \\
&= -\int_0^a dz \int_y^{y+a} \frac{-b dy}{y} \\
&= ab \ln \frac{y+a}{y}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\Phi}{dy} &= ab \left(\frac{1}{y+a} - \frac{1}{y}\right) = \frac{-\mu_0 I a^2}{2\pi y(y+a)} \\
F &= \frac{-\mu_0 I I' a^2}{2\pi y(y+a)}
\end{aligned}$$